Kapitel 1

Aussagenlogik

1. Die Konjunktion „Der Hamster kann fliegen“ $\wedge$ „Der Wellensittich kann fliegen“ ist falsch. „Am Himmel sind Wolken“ $\wedge$ „Es scheint die Sonne“ ist nur dann falsch, wenn am Himmel keine Wolken sind und nicht die Sonne scheint. !„Eis ist flüssig“ ist wahr.

2. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ist eine Tautologie.

   $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \vee \neg p))$ hat die folgende Wahrheitstabelle:

p	q	r	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$
f	f	f	w
f	f	w	w
f	w	f	w
f	w	w	w
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

3. Der Ausdruck ist keine Tautologie. Wenn die Wahrheitswerte der Variablen p und q übereinstimmen ist der Ausdruck falsch.

4. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = p \Leftrightarrow q$.

5. $a = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) = \neg r \vee (\neg p \wedge q) = r \wedge (p \vee \neg q)$, $b = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) = \neg p \wedge (\neg q \vee \neg r) = p \vee (q \wedge r)$.

6. $g = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) = (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge q)$.

7. $\neg x \wedge \neg y \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$.

8. $m = w$ „Motor läuft“, $d = w$ „Öldruck vorhanden“, $t = w$ „Temperatur in Ordnung“:

$$f(m, d, t) = (m \wedge \neg d) \vee (m \wedge \neg t).$$

9. $L = w$ „Licht an“, $S = w$ „Schlüssel steckt“, $T = w$ „Tür ist geschlossen“, $W = w$ „Warnton ertönt“:

$$W = L \wedge \neg S \wedge \neg T.$$

10. Mit den logischen Ausdrücken

$$\begin{aligned}
z_0 &= \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_1 &= \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D,\\
z_2 &= \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D,\\
z_3 &= \neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D,\\
z_4 &= \neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_5 &= \neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D,\\
z_6 &= \neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D,\\
z_7 &= \neg A \wedge B \wedge C \wedge D,\\
z_8 &= A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D,\\
z_9 &= A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D
\end{aligned}$$

erhalten wir die Steuerung

$$\begin{aligned}
a &= \neg(z_1 \vee z_4),\\
b &= \neg(z_5 \vee z_6),\\
c &= \neg z_2,\\
d &= \neg(z_1 \vee z_4 \vee z_7),\\
e &= z_0 \vee z_2 \vee z_6 \vee z_8,\\
f &= \neg(z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee z_7),\\
g &= \neg(z_0 \vee z_1 \vee z_7).
\end{aligned}$$

11. Auf zur Buchhandlung ...

12. Wahrheitstabelle aufstellen!

13. $\frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$.

14. Direkter Beweis: $(2n+1)(2m+1) = 2(2nm+n+m)+1$, indirekter Beweis: $(2n+1)(2m+1) = 2k \Leftrightarrow 2(2nm+n+m) = 2k-1$, ein Widerspruch.

15. Die Induktionsbasis ist $n = 4$: $2^4 = 16 < 4! = 24$. Der Induktionsschritt folgt aus $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < 2n! < (n+1)n! = (n+1)!$.

16. $1+2+\cdots+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, die zweite Behauptung folgt mit $2+6+10+\cdots(4(n+1)-2) = 2n^2+4n+2 = 2(n+1)^2$.

Kapitel 2

Zahlen

1. Der Beweis für $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ verläuft vollkommen analog zum Beweis von $\sqrt{2}$. Der Beweis für $\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$ bricht zusammen, denn wenn p^2 durch 4 teilbar ist, dann muss dies nicht für p gelten. Ein Gegenbeispiel ist $p^2 = 36$.

2. $\sum x_i = 10, \prod x_i = 20, \sum x_i y_i = 18, \prod x_i y_i = 240$.

3. $\sum \frac{1}{i} = 2,928\,968\,253\,968\,25, \sum(i+3) = 85, \prod(6i-2) = 74\,385\,581\,670\,400$.

4. Die beiden Wurzeln für $(1+i)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{2}(\cos 22,5^\circ + i \sin 22,5^\circ) \\ z_2 &= \sqrt[4]{2}(\cos 202,5^\circ + i \sin 202,5^\circ) \end{aligned}$$

   Die vier Wurzeln für $(-8 + i8\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\ z_2 &= 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \\ z_3 &= 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) \\ z_4 &= 2(\cos 15^\circ + i \sin 315^\circ) \end{aligned}$$

   Die drei Wurzeln für $i^{\frac{1}{3}}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ \\ z_2 &= \cos 210^\circ + i \sin 210^\circ \\ z_3 &= \cos 330^\circ + i \sin 330^\circ \end{aligned}$$

5. $z_i = \cos\left((i-1)\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left((i-1)\frac{2\pi}{5}\right), 1 \le i \le 5$.

6. Weil genau vor der ersten Nachkommastelle aufgehört wird, bei der $0.\ldots\overline{00}$ beginnen würde.

7. $(674)_{10} = (10144)_5 = (1010100010)_2$

8. $(745)_8 = (485)_{10} = (122222)_3$

9. Exemplarisch die Addition:

$$\begin{aligned} (543)_6 + (242)_6 &= 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 1 \\ &= (1225)_6 \end{aligned}$$

10. $\frac{1}{5} = (0.\overline{1254})_7$, $\frac{2}{5} = (0.\overline{0110})_2$

11.

$$\begin{aligned} 1,0 &= 0\ 01\ 111\ 111\ 00\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000, \\ 0,5 &= 0\ 01\ 111\ 110\ 00\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000, \\ -6,625 &= 1\ 10\ 000\ 010\ 10\ 101\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000, \\ 3456 &= 1\ 10\ 001\ 010\ 10\ 110\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000. \end{aligned}$$

12. Die erste Bitfolge stellt $-3,0$; die zweite $-1,125 \cdot 2^{33}$ dar.

13. $2b^p(e_{max} - e_{min} + 1)$ Zahlen

14. Die kleinste Zahl ist

$$-0.\underbrace{00\ldots00}_{(p-1)-mal}1 \cdot b^{e_{min}},$$

die größte ist

$$0.\underbrace{(b-1)(b-1)\ldots(b-1)(b-1)}_{p-mal} \cdot b^{e_{max}}.$$

Die kleinste Zahl für IEC single ist $-0.\underbrace{00\ldots00}_{23-mal}1 \cdot 2^{-125}$, die größte $0.\underbrace{11\ldots11}_{24-mal} \cdot 2^{128}$.

IEC double berechnet man analog.

15. Bei der „Rückwärtsiteration“ wird der Fehler, der durch eine ungenaue Zahldarstellung entsteht mit $\frac{1}{(50-30)!}$, bei der Vorwärtsiteration mit 30! multipliziert.

Kapitel 3

Zahlentheorie

1. $7\,777 = 7 \cdot 11 \cdot 101$, $10\,121\,804 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 557$.
2. Die Aussage folgt aus Satz 3.6.
3. $2, 5, 17$ und 37.
4. 144 und 89 sind relativ prim.
5. Die Lösung der ersten Gleichung ist $x = 3\,000, y = -2\,000$, die zweite Gleichung hat die Lösung $x = -16, y = 101$.
6. $\text{ggT}(25, 35) = 5$, also ist die Gleichung für die rechten Seiten 45 und 50 lösbar, mit den Lösungen $x = 27, y = -18$ und $x = 30, y = -20$.
7. Die Verknüpfungstabellen:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\odot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

8. Die Beweise verlaufen analog zur 11-er Regel. Es ist $10^i \equiv 1 \mod p$, $p = 3$, $p = 9$ und
$$n \equiv \left(\sum a_i\right) \mod p, \text{für } n = \sum a_i 10^i.$$
9. Für die Lösung kann der kleine Satz von Fermat verwendet werden. Es gilt $3^{15} \equiv 1 \mod 13$, $15^{83} \equiv 7 \mod 13$.
10. Kein Problem für einen Informatiker, oder?
11. $3 - 446 - 21368 - 6$, $3 - 451 - 18611 - X$, $3 - 528 - 27268 - 6$.
12. Sorry, Pharmazentralnummern wurden leider gestrichen ...
13. Sorry, Pharmazentralnummern wurden leider gestrichen ...
14. Die zweite Nummernkombination enthält einen Fehler!

15. Wir interpretieren die Umlaute wie „ü“ als ue, wandeln alle Buchstaben in Kleinbuchstaben um und ignorieren die Blanks, dann erhalten wir:

    mit $(5, 21)$ „nvembnvehxwzbohiwdonvehxbo“;

    und mit $(15, 7)$ „nhkejnhklzqrjwluqbwnhklzjw“.

16. Mit Hilfe der modularen Arithmetik ergibt sich aus zwei Gleichungen für zwei Unbekannte $(s, t) = (7, 3)$.

17. Wir interpretieren „Ü“ als „UE“. Wenn wir wie im Beispiel aus Seite 86 alles als Großbuchstaben interpretieren und die Blanks ignorieren erhalten wir die Zahlenfolge

    2 563, 2 074, 2 154, 940, 2 524, 2 563, 2 074, 2 154, 2 113, 2 758, 1 996, 3 327, 2 524, 2 349, 2 113,

    2 035, 1 996, 3 208, 2 349, 2 563, 2 074, 2 154, 2 113, 2 758, 2 524, 2 349.

18. $s = 12, 23, 32, 43, n = 8, 23$.

19. Wir interpretieren die Umlaute wie ü als ue, wandeln alle Buchstaben in Kleinbuchstaben um und ignorieren die Blanks, dann erhalten wir die Zahlenfolge

    25 099, 1, 18 655, 10 830, 30 887, 25 099, 1.18 655, 9 789, 26 899, 30 476, 1 627, 30 887,

    55 5115, 9 789.24 800, 30 476, 30 055, 5 115, 25 099, 1, 18 655, 9 789, 26 899, 30 887, 5 115.

20. Der Sender verschlüsselt die Nachricht mit Hilfe seines privaten Schlüssels und sendet diese Chiffre an den Empfänger. Dieser verwendet den allgemein bekannten Schlüssel des angegebenen Senders. Erhält er damit Klartext, stimmt der angegebene mit dem wirklichen Sender überein (oder jemand kennt den privaten Schlüssel ...).

Kapitel 4

Relationen und Abbildungen

1. .

2. Wir ordnen in den einzelnen Farben die Karten als 7, 8, 9, Bube, Dame, König, 10, 11, die Farben in der Reihenfolge Karo, Herz, Pik und Kreuz. Eine mögliche Verteilung wäre dann beispielsweise:

$$\begin{array}{cccc} 01100010 & 01001001 & 00101010 & 00000100 \\ 00000101 & 01100101 & 01010100 & 10000000 \\ 10011000 & 00000000 & 10000000 & 01111011 \\ 00000000 & 00001000 & 00000001 & 00000000 \end{array}$$

3. $\emptyset$.

4. Beide Aussagen sind falsch. Ein Gegenbeispiel für die erste Aussage ist $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{1, 6, 7\}$, $V = \{2, 6, 7\}$; für die zweite $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{0, 1\}$, $V = \{-1, 0, 1\}$.

5. $S \times (T \cap V) = \{(1, b), (2, b)\}$,
   $(S \times T) \cup (S \times V) = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
   $(S \times T) \cap (S \times V) = \{(1, b), (2, b)\}$.

6. Regionalzüge haben hier immer nur einen Waggon, wir erhalten
   $Z \times A = \{(Z_1, A_1), (Z_1, A_2), (Z_2, A_1), (Z_2, A_2), (Z_3, A_1), (Z_3, A_2)\}$.

7. Als Tabelle erhalten wir

x	y
1	2
1	5
1	6
2	2
2	4
3	4
3	6
4	6
5	5

8. Ist möglich, wie das Beispiel $R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$, $R_2 = \{(c, 1), (d, 2)\}$ zeigt, die Verknüpfung ist möglich, das Ergebnis ist $\emptyset$.

9. $R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = \{(d, a), (a, a)\}$, $R_1^{-1} \circ R_2^{-1} 0\{(b, c), (c, c)\}$.

10. $(x, x) \in R_1 \wedge (x, x) \in R_2 \Rightarrow (x, x) \in R_1 \circ R_2 \; \forall x \in M$.

11. Für $(x, y) \in R$ müssen wir $(x, y) \in R \circ R$ nachweisen. R ist reflexiv, also ist $(x, x) \in R$. $(x, x) \in R, (x, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R \circ R$.

12. Wenn wir schreiben, was $R \circ R \subseteq R$ bedeutet, steht da die Definition der Transitivität!

13. Die möglichen Partitionen sind $K_1 = \emptyset, K_2 = M; K_1 = \{9\}, K_2 = \{12\}, K_3 = \{21\}; K_1 = \{9\}, K_2 = \{12, 21\}; K_1 = \{12\}, K_2 = \{9, 21\}; K_1 = \{21\}, K_2 = \{9, 12\}$. Dass die angegebene Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, können Sie leicht nachrechnen. Die Äquivalenzklassen sind $[9] = \{9\}, [12] = \{12, 21\}$.

14. R_m ist eine Äquivalenzrelation. R_W ist keine, sie ist nicht reflexiv. R_{10} ist ebenfalls keine Äquivalenzrelation, denn sie ist nicht reflexiv, $(4, 4) \notin R_{10}$.

15. Das ist analog zu Satz 4.9 beweisbar!

16. Die Ordnungseigenschaften sind leicht nachrechenbar. Die erste Teilordnung ist nicht total, denn es gibt unvergleichbare Paare wie $(3, 6), (4, 1)$. Bei der zweiten Ordnung kann das nicht auftreten.

17. Wenn R transitiv ist, dann ist auch $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Die Antisymmetrie der Teilordnung folgt aus $R[x] \leq R[y] \Leftarrow (x, y) \in R$, $R[y] \leq R[x] \Leftarrow (x, y) \in R$. Dann ist aber $(x, y) \in R, (x, y) \in R$ und $x \sim y \Leftrightarrow R[x] = R[y]$.

18. Die Abbildung f ist für $n \geq 5$ periodisch, es ist $f(n) = f(n + 6)$. Dann kann sie aber nicht surjektiv sein!

19. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= 2x + 1, \\
(f \circ h)(x) &= x^2 + 1, \\
(g \circ f)(x) &= 2(x + 1), \\
(g \circ h)(x) &= 2x^2, \\
(h \circ h)(x) &= (x + 1)^2, \\
(h \circ g)(x) &= 4x^2.
\end{aligned}
$$

20. Folgt aus Satz 4.6, Abbildungen sind Relationen!

21. Es gibt vier Abbildungen $f : [0, 1] \to [0, 1]$:

$$
\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}
$$

22. f hat nur natürliche Zahlen als Bilder, denn entweder ist $(n + m)$ oder $(n + m + 1)$ gerade. Allerdings ist $f(m, n) \geq 4$, also ist f nicht bijektiv!

23. Nach Satz 4.13 ist das Intervall $[0, 1]$ überabzählbar. Die Abbildung $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ ist bijektiv. Für $y \in [0, 1]$ ist das eindeutige Urbild gegeben durch $t = a + y(b - a)$. Damit haben alle Intervalle die gleiche Kardinalzahl.

24. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$ sicher nicht abzählbar. Wenn Sie in der theoretischen Informatik etwas über die Kontinuumshypothese gehört haben, dann wissen Sie, wie der Beweis funktioniert.

    Wir führen für Kardinalzahlen eine Arithmetik ein, die Summe zweier Kardinalzahlen ist definiert als $|M| + |N| = |M \cup N|$. Das Produkt ist definiert über die Mächtigkeit des kartesischen Produkts $|M| \cdot |N| = |M \times N|$. Dann kann $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ und $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = |\mathbb{R}|$ bewiesen werden. Damit folgt sofort $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^2| = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = |\mathbb{R}|$.

25. Wenn wir die Operation als Mengenoperation schreiben steht da $R_1 \cap R_2$.

26. Wir übersetzen die relationalen Operatoren in Mengenoperatoren und führen einen Beweis der Gleichheit zweier Mengen.

Kapitel 5

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

1. $(AB)C = A(BC) = \left(\begin{smallmatrix} -29 & -3 \\ -7 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.
2. Für singuläre Matrizen $A \neq 0$ können die Regeln verletzt werden!
3. Folgt aus
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=j+1}^{l} a_{ik} b_{kj} = 0.$$
4. Wegen Satz 5.6 ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. a, b, c ergeben sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems, es gilt $a = 1, b = 3, c = 1$.
6. Die Koeffizienten ergeben sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems, es gilt $a_3 = 1, a_2 = -2, a_1 = 0, a_0 = 3$.
7. Es ist
$$E_1 = E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
8. A ist nicht invertierbar,
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$
9. Die Inverse ist eindeutig bestimmt, nachrechnen der beiden Eigenschaften führt leicht zum Beweis.
10. Hat $(QA)\mathbf{x} = Q(A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dann kann auch $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung haben.

11. Für A:
$$L = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
für B:
$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Die Lösung für B ist $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}^T$.

12. 102.

13. A ist singulär!

14. Die Eigenwerte von A: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$, die Eigenvektoren sind $\mathbf{x}_1 = \binom{-1}{1}, \mathbf{x} = 2 = \binom{1}{1}$. Die Eigenwerte von B: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$, die Eigenvektoren sind $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15. Die Eigenwerte von A^{25} sind λ^{25} der jeweiligen Eigenwerte von A, es gilt $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$.

16. Die Matrix A muss zwei reelle Eigenwerte haben. Mit der Formel von Vieta folgt dann nach Aufstellen des charakteristischen Polynoms die Behauptung.

17. Die Matrix F hat die Eigenwerte θ und $1 - \theta$, analog dem Beispiel im Text erhalten wir die Darstellung der Fibonacci-Folge auf Seite 184!

Kapitel 6

Kombinatorik

1. 159.
2. $64 \cdot 49 = 3\,136$.
3. Jede Zahl in $M \setminus \{100\}$ können wir als $m = x \cdot 9 + y$ darstellen, mit $x \in X = \{0, \ldots, 10\}$, $y \in Y = \{1, \ldots, 9\}$. Eine Teilmenge $L \subseteq M$ ist dann als eine Relation in $X \times Y$ interpretierbar. in der Notation wie in Tabelle 6.1 ergibt sich eine Verteilung von 0 und 1 Einträgen. Die Anzahl der Einsen ist die Mächtigkeit der Teilmenge. Die maximale Kardinalzahl einer Teilmenge L von M, so dass immer $a - b \neq 9$ gilt entsteht durch alternierende 1-Einträge in jeder Spalte. Das entspricht einer Teilmenge mit 54 Elementen. Ein 55. Element muss in einer der Spalten liegen.
4. 32!
5. $30 \cdot (52 \cdot 51 + 10^4) = 382680$.
6. Einsetzen der Definition.
7. Mit der binomischen Formel gilt $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$.
8. Es gibt $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ Möglichkeiten, gegnerische Doppel auszusuchen und $\frac{(4n)!}{2^n n!}$ Möglichkeiten, Doppel zu bilden.
9. Mit der Annahme, dass die Anzahl der Professoren, die zwei Programmiersprachen beherrschen unabhängig von den Sprachen ist, ist die gesuchte Anzahl 90.
10. $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 12x^4 + 12x^5 + 10x^6 + 6x^7 + 2x^8 + x^9$.
11. $\binom{24}{6}\binom{18}{6}\binom{12}{4}\binom{8}{4} = \frac{24!}{(6!)^2(4!)^3}$.
12. Ergibt sich aus der Mengenalgebra oder dem Inklusions / Exklusionsprinzip als $7^{10} - 2 \cdot 6^{10} + 5^{10}$.
13. 2-Permutationen: 2, 3-Permutationen: 9, 4-Permutationen: 12, 5-Permutationen: 15, 6-Permutationen: 60.
14. $\Delta(\sin \omega n) = \sin (n+1)\omega - \sin n\omega$, $\Delta(\cos \omega n) = \cos (n+1)\omega - \cos n\omega$.
15. Der Nachweis verläuft analog zu $(\Delta p^k)(n) = kp^{k-1}(n)$ auf Seite 174.
16. Als Summenformel ergibt sich $\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$.
17. $\sum_k H_k = (n+1)H_{n+1} - n$, $\sum_k \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \frac{H_{n+1}-1}{m+1}$, $\sum k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

18. $f(n) = a^n$, $f(n) = \frac{(n+1)!}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{6^k}{k!}$.

19. $f(n) = n(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k-1}{(k+1)(k+2)}$.

20. $f(n) = -\frac{1}{3}2^n + \frac{1}{3}5^n - \frac{1}{2}3^n$, $f(n) = n(-3)^{n-1} + \frac{3}{16}n - \frac{3}{32} + \frac{1}{25}2^n$.

21. Das Ergebnis ist wiederum die Fibonacci-Folge $f(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}(\theta^n - (1-\theta)^n)$.

Kapitel 7

Algebra

1. Das neutrale Element ist (e_1, e_2), die inversen Elemente sind (x^{-1}, y^{-1}).

2. Angenommen, es gibt zwei Elemente $b \neq c$ mit $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$. Dann gilt

$$b = a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c) = c,$$

   ein Widerspruch.

3. Wir müssen das neutrale Element wählen und für die restlichen Elemente entscheiden, wie die inversen Elemente aussehen. In jeder Zeile und jeder Spalte muss jedes Element genau einmal auftreten. Bleibt sowohl für $n = 2$ als auch für $n = 3$ genau eine Verknüpfungstafel übrig.

4. U_1, U_2 sind Untergruppen, in U_3 ist weder das neutrale Element enthalten noch ist die Addition abgeschlossen.

5. $N(f) = \emptyset, R(f) = (0, \infty)$.

6. Es ist $N(\gamma_x) = \{e\}$, das Urbild für ein $m \in M$ ist $n = x^{-1} \circ m \circ x$. Die Identität ist eine Konjungation. Die Abgeschlossenheit folgt aus

$$\gamma_x \circ \gamma_y(n) = x \circ y \circ n \circ y^{-1} \circ x^{-1} = \gamma_{x \circ y}(n).$$

7. $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$ ist isomorph zu $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$ mit

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \\
\sigma_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\
\sigma_3 = \sigma_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \\
\sigma_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \\
\sigma_5 = \sigma_4^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

8. Alle Permutationen, die *eine* Zahl unverändert lassen.

9. Folgt aus dem Satz von Lagrange und Satz 7.17.

10. S_3 ist nicht abelsch. Wir müssen die Untergruppen suchen, die Normalteiler darstellen. Es bleibt die Untergruppe $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

    Die Faktorgruppe hat dann 2 Elemente, $[a] = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, [b] = \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$. Es gilt im Wesentlichen $A(\sigma_i) = [a], 1 \leq i \leq 3$ und $A(\sigma_i) = [b], 4 \leq i \leq 6$.

11. Nachrechnen!

12. In $\mathbb{Z}_7$ hat die Gleichung die beiden Lösungen $x = 3, x = 4$. In $\mathbb{Z}_5$ existiert keine Lösung.

13. Die Tabellen definieren zwei abelsche Gruppen, bleibt, die Distributivgesetze zu überprüfen. Es gilt $c \times (c \diamond d) = c \neq c \times c \diamond c \times d = a$.

14. Über $\mathbb{R} : x + x^2 + 2x^4 + x^6 + 2x^7 + x^9 + x^{10}$, über $K_2 : x + x^2 + x^6 + x^9 + x^{10}$.

15. $r_1(x) = x^2, s_1(x) = -1 + x^2$ und $r_2(x) = -8 + 2x, s_2(x) = -336 + 48 + 9x^2$.

16. $x = 4$ ist Nullstelle ...

17. Nur über $\mathbb{C}$ zerfällt das Polynom in Linearfaktoren:

$$p(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2}).$$

18. Die dritten Einheitswurzeln von 1 in $\mathbb{C}$ sind $z_1 = 1, z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

19. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -30 \\ 12 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, in $\mathbb{Z} : 20$, in $\mathbb{Z}_5 : 0$, in $\mathbb{Z}_6 : 2$.

20. Nachrechnen, es gilt immer $x^3 = x$.

21. Die Annahme, dass es zwei verschiedene gibt führt zum Widerspruch, so wie schon bei der Eindeutigkeit des inversen Elements in Gruppen.

22. Nachrechnen!

Kapitel 8

Graphentheorie

1. Die Matrix BB^T ist eine $n \times n$ Matrix. Für die Elemente des Produkts ausserhalb der Diagonalen ist $b_{il}b_{lj} = 1$ genau dann, wenn es eine Kante zwischen den Ecken u_i und u_j gibt. In der Diagonalen gilt $\sum_{k=1, i\neq i}^{m} b_{ik}b_{ki} = d(u_i)$.

2. Lesen Sie die Inzidenzmatrix spaltenweise, dann können Sie direkt den Graphen zeichnen. Bei der Adjazenzmatrix reicht es, das obere Dreieck zu betrachten und die Kanten zu zeichnen. Graphnelayout ist nicht so leicht ...

3. Angenommen, k ist eine Brücke und liegt in einem Kreis. Dann kann nach dem Herausnehmen von k immer noch jeder Knoten im Kreis erreicht werden; ein Widerspruch. Ist umgekehrt $k = u_i u_j$ eine Brücke, dann gibt es keinen weiteren Weg von u_i nach u_j, k kann nicht in einem Kreis liegen.

4. In jeder Spalte j gibt es zwei Einträge ungleich Null. Einer der Einträge entspricht einem Anfangs-, einer einem Endpunkt. Daraus folgt die Spaltensumme. $d^+(u)$ entspricht der Anzahl der 1-Einträge in jeder Zeile, $d^-(u)$ der -1- Einträge.

5. Für einen Baum gilt $|K| = |E| - 1$, mit Satz 8.1 folgt die eine Richtung. Dass eine Folge von Zahlen mit der geforderten Eigenschaft einen Baum definiert kann induktiv bewiesen werden. Für $n = 2$ ist $d_1 = d_2 = 1$ die einzige Möglichkeit, der zugehörige Graph ist K_2. In $d_1 \geq \ldots \geq d_{n+1} > 0$ mit $\sum d_i = 2n$ gibt es zwei Indizes mit $d_i = 1, d_j > 1$. Durch Entfernen dieser beiden Zahlen und der dazugehörenden Ecken und anschliessenden Hinzufügen der Zahl $d_j - 1$ können wir die Induktionsbehauptung anwenden.

6. Ausgehend von der Wurzel einmal Tiefensuche, im zweiten Fall Breitensuche.

7. $1(1)3(2)2(3)2(4)6(5)6(6)$.

8. $K_5 = \{ce, ef, cb, cd, ba\}$.

9. $K_6 = \{15, 13, 57, 32, 36, 74\}$.

10. K_5 ohne eine beliebige Kante hat die chromatische Zahl 4. Die anderen Graphen sind Kreise. Für gerades n haben Kreise die chromatische Zahl 2, für ungerades n 3.

11. Niveauweise Färben!

12. Ein Graph mit 12 Ecken hat wegen Satz 8.1 die geforderte Eigenschaft. Beispielsweise der Graph mit den Zusammenhangskomponenten $G = K_5 \cup K_5$ hat die chromatische Zahl 6.

13. $|E| = m + n$ folgt direkt aus der Definition; $|K| = mn$ aus der Produktregel der Kombinatorik.

14. Ist die Eckenbezeichnung von oben nach unten links $1, 2, 3, 4, 5, 6$, rechts a, b, c, d, e, dann ist $\{1b, 2a, 3c, 4d, 6e\}$ ein maximales Matching.

Kapitel 9

Folgen und Reihen

1. (a_n) ist streng monoton steigend und beschränkt mit Schranken 0 und 1, (b_n) ist streng monoton fallend und nach oben beschränkt mit Schranke 1, (c_n) ist streng monoton steigend und nach unten beschränkt mit Schranke 1.

2. Dass 0.7 eine untere Schranke der Folge (a_n) ist folgt aus

$$\begin{aligned} a_n > 0.7 &\Leftrightarrow \sqrt{25n^2+7n+1} > 5n + \frac{7}{10} \\ &\Leftrightarrow 25n^2+7n+1 > 25n^2+7n+(\frac{7}{10})^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > \frac{49}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{25(n+1)^2+7(n+1)+1} - (\sqrt{25n^{+}7n+1}+5) \\ &= \sqrt{25n^{+}7n+26+(50n+7)} - \sqrt{25n^2+7n+26+10\sqrt{25n^2+7n+1}}. \end{aligned}$$

Es ist $10\sqrt{25n^2+7n+1} > 50n+7$, damit folgt $a_{n+1} - a_n < 0$.

3. Die Ungleichung

$$\frac{2n}{n^2+2} < \frac{1}{100}$$

ist erfüllt für $n > 200$.

4. Die Folge (a_n) hat das Infimum 1 und Supremum 2, (b_n) 0 als Infimum und $\frac{1}{2}$ als Supremum und (c_n) besitzt das Infimum -1 und Supremum $\frac{4}{9}$.

5. Für beliebiges $\epsilon > 0$ und $n > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$ ist $|\frac{1}{2^n}| < \epsilon$, für $n > \frac{1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}$ ist $|b_n - b| < \epsilon$.

6. Ausklammern der höchsten Potenz aus und die Limessätze verwenden! Bei der Folge (a_n) liegen die ersten 17 Folgeglieder ausserhalb der ϵ-Umgebung mit $\epsilon = 0.1$, bei (b_n) sind dies die ersten 197 Folgeglieder für $\epsilon = 0.005$.

7. $\frac{2}{3}$.

8. Die ersten drei Reihen konvergieren auf Grund des Quotientenkriteriums, die Konvergenz der alternierenden Reihe folgt aus dem Leibniz-Kriterium.

9. Mit dem binomischen Lehrsatz folgt

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Mit den ersten beiden Summanden ist $a_n > 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} = 2$. Es ist

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{123\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k}\\ &= \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) < \frac{1}{k!};\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Die Folge $(\frac{1}{2})^n$ ist eine Nullfolge. (a_n) ist auch monoton wachsend und konvergiert gegen die Euler'sche Zahl $e = 2.71828182\ldots$.

10. Wie wir wissen divergiert die harmonische Reihe, die Folge der Teilsummen wächst über jede Grenze. Egal welches Gleitpunkt-Zahlensystem wir benutzen, jedes dieser Systeme hat eine größte darstellbare Zahl. Wird diese erreicht, erhalten wir danach immer nur diese größte Zahl als Summenwert.

11. Es gibt die konvergenten Majoranten $\sum \frac{1}{i^2}$ und $\sum \frac{1}{i^{3/2}}$.

12. $R = 1$, am Rand divergent; $R = \infty$; $R = \infty$; $R = 1$, am Rand divergent; $R = 1$, am Rand konvergent; $R = 1$, für $x = 1$ divergent, für $x = -1$ konvergent.

13. Wenn wir den Quotienten bilden und ausnutzen, dass wir die Glieder der Fibonacci-Folge durch den goldenen Schnitt θ angeben können, dann erhalten wir

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\theta^{n+1} + (1-\theta)^{n+1}}{\theta^n + (1-\theta)^n},$$

mit den Limessätzen folgt die Behauptung, denn $(1-\theta)^n$ ist eine Nullfolge.

14. Der Kern einer Implementierung des euklidischen Algorithmus:

```
while (b!=0) { temp = a; b = a%b; b = temp; }
return a;
```

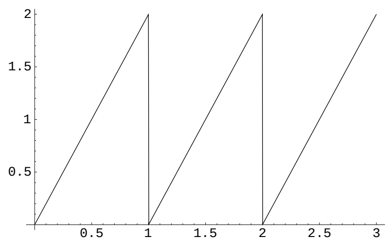
Die Werte in der folgenden Tabelle wurden mit g++ und *unsigned long* als Ganzzahltyp berechnet.

a	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$[\frac{\log(\sqrt{5}a+\frac{1}{2})}{\log\theta}]$	10	15	19	24	29	34	38	43
Max. Anzahl Schritte für ggT$(a, b), b < a$	7	11	15	19	24	28	32	37

Kapitel 10

Differenzial- und Integralrechnung

1. Die Lösung:



2. Das Argument $\frac{1}{x}$ geht gegen Unendlich, die Sinus-Funktion hat aber keinen Grenzwert für $x \to \infty$.
3. f hat einen Pol, g hat den Funktionswert 0, h hat einen Pol.
4. Die erste Funktion hat die Asymptote 2, die zweite geht im positiven gegen ∞, im negativen gegen $-\infty$.
5. $x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; keine.
6. In $[0, 10^4]$.
7. $x = 0$ ist die exakte Lösung!
8. Auf $[-1, 1]$ streng monoton wachsend, sonst konstant.
9. $f_1^{-1}(x) = x^2 - 1$; $f_2^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; f_3 ist umkehrbar, allerdings ohne dass die inverse Funktion geschlossen darstellbar ist; $f_4^{-1}(x) = \frac{3x+2}{1-x}$.
10. $3 + 392x + 18x^2 + 32x^3$; $\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$; $\frac{-1}{(x-1)^2} + 4\frac{1+x^2+2x^3}{(-1+x^2)^2(1+x)^2}$; $-\frac{2}{3}\frac{x}{(1-x^2)^{2/3}}$.
11. $x \sim 1,763\,169\,98$.
12. $e^{-kx}(\omega \cos \omega x - k \sin \omega x)$, $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $\frac{2}{1+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x(1-x}}$
13. $cosh(x), sinh(x)$
14. Nein, in $x = 0$ ist f nicht stetig!
15. $\xi = x$.

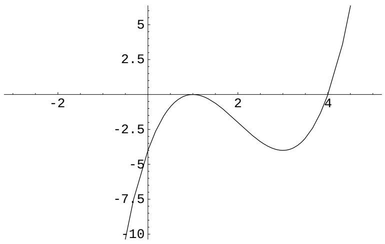
16. $p_4(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-a) - \frac{\sqrt{3}}{3}(x-a)^2 - \frac{1}{6}(x-a)^3 + 15\sqrt{3}(x-a)^4$.

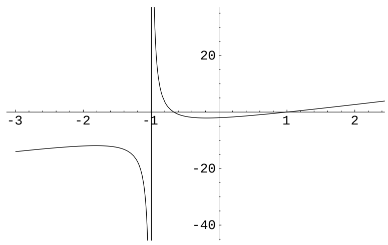
17. Es gilt $f^{(n)}(0) = (-2)^n(n-1)!$ und $f^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{(1+x)^n}$. Damit kann das Restglied abgeschätzt werden durch $\frac{2}{n+1}|x|^{n+1}$.

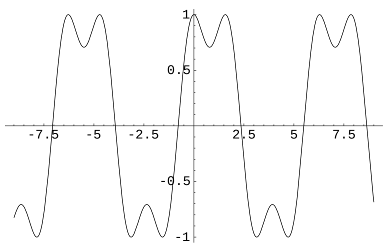
18. $5; -\frac{1}{2}; 0; 0$.

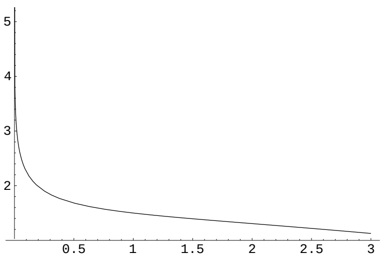
19. f ist monoton wachsend, in Intervallen, die die 0 nicht enthalten sogar streng.

20. So sollte es aussehen:









21. sin ist auf $(0;\pi)$ konkav und auf $(-\pi, 0)$ konvex.

22. $\frac{16}{3}$; Teilintervalle mit Schrittweite $\frac{1}{2^k}$ sind hilfreich.

23. $e^{-1} \leq I_1 \leq e^{-2}, 0 \leq I_2 \leq 0,13\pi$.

24. $2e^x - \frac{10^x}{\ln 10} + C, \frac{-ta^x}{\ln ta} + C, e^t - \frac{4^t}{\ln 4} + C, \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x}, \frac{1}{4}(\ln(x-1) + \ln(x+1)) + C$.

25. $\frac{3}{2}, 0, -9, 4$.

26. $\ln(2-3x+4x^3) + C, \ln\ln x + c, \frac{1}{2}\tan(x^2) + C, e^x(x-1) + C, \frac{1}{2}\ln x^2 + C, -\frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x)$.

27. Partielle Integration führt zur Rekursion $f_0 = 1 - e^{-1}$, $f_{n+1} = 1 - (n+1)f_n$ aus Aufgabe 15, Seite 55.

28. $-\frac{23}{6} + 6b - \frac{5}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3$.

29. $\frac{13}{6} + e^{-2}$.

30. Das erste Integral existiert nicht; das zweite hat den Wert π.

31. Das erste Integral hat den Wert $3\sqrt{3}$, das zweite existiert nicht, das letzte hat den Wert 10.

Kapitel 11

Angewandte Analysis

1. $p(x) = x$.
2. $p(x) = \ln 10 + (x - 10)(-\ln 10 + \ln 11 + \frac{1}{2}(x - 11)(\ln 10 - 2\ln 11 + \ln 12))$. An der Stelle $11,1$ ist der Fehler kleiner oder gleich $3,310^{-5}$, die dritte Ableitung von ln auf $[10, 12]$ ist abschätzbar durch $\frac{1}{500}$.
3. Es ist kein Programmierfehler, wenn Sie am Rand große Abweichungen erhalten!
4. $p(x) = 0,7408(H_0^3(t) - 0,1H_1^3(t)) + 0.6703(0,1H_2^3(t) - H_3^3(t))$, der Fehler an der Stelle $0,34$ ist $1,694\,92 \cdot 10^{-7}$.
5. Die Berechnung erfolgt analog zum kubischen Fall, die zweiten Ableitungen in 0 1 kommt jetzt hinzu:

$$\begin{aligned}
H_0^5(x) &= 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5,\\
H_1^5(x) &= x - 6x^3 + 8x^4 - 3x^5,\\
H_2^5(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}x^5,\\
H_3^5(x) &= 10x^3 - 15x^4 + 6x^5,\\
H_4^5(x) &= -4x^3 + 7x^4 - 3x^5,\\
H_5^5(x) &= \tfrac{1}{2}x^3 - x^4 + \tfrac{1}{2}x^5.
\end{aligned}$$

6. Programmieren!
7. Programmieren!
8. Die zweiten Ableitungen verschwinden!
9. Programmieren!
10. Analog zu Aufgabe 8.
11. Nichts, denn es gilt $H_0^3(1 - x) = H_3^3(x)$, $H_1^3(1 - x) = -H_2^3(x)$.

Kapitel 12

Euklidische Vektorräume

1. .
2. $(-7, 1, 10), (-6, 4, 4), (-7, 1, 10), (-100, 17, 72)$.
3. $\frac{1}{3}(-8, 1, 8)$.
4. Gleichungssystem aufstellen!
5. Gesetze nachrechnen. Solange wir an Stelle von $\mathbb{R}$ einen Körper einsetzen erhalten wir immer einen Vektorraum!
6. $\Rightarrow$: es gibt Skalare mit $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \lambda\mathbf{v}', \mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$. $\Leftarrow$: Es gibt genau einen Punkt im Schnitt, nennen wir den $\mathbf{x}$, zusammen mit der Gleichheit der Richtungsvektoren folgt die Behauptung.
7. $E(\lambda, \mu) = (-4, -1, -1)^T + \lambda(2, 1, 0)^T + \mu(3, -1, 2)^T$.
8. $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.
9. 7, 5.
10. $\lambda = -3$.
11. Abbildung 12.11, wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ orthogonal sind, steht da der bekannte Satz von Pythagoras.
12. Einsetzen der Definition führt zum Beweis. $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}$ bilden die Diagonalen im von $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramm.
13. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 0 \Leftrightarrow 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}$ stellen Diagonalen in einem Rechteck dar!
14. $(20, -23, 14), (20, -23, 14), (16, -35, 0)$.
15. Jeweils das Vektorprodukt bilden!
16. $2\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
17. Die Ausdrücke für Sinus und Cosinus aus dem Text einsetzen führt zum Ergebnis!
18. Mit Satz 12.15 folgt $\frac{\sqrt{77}}{2}$.

Kapitel 13

Allgemeine Vektorräume

1. .
2. Nein, denn weder $(\lambda\mu)(x, y) = \lambda(\mu(x, y))$ noch $1(x, y) = (x, y)$ sind erfüllt!
3. ja.
4. Beide sind Unterräume!
5. ja.
6. ja.
7. Angenommen, die Vektoren wären linear abhängig, dann könnten wir x_3 als Linearkombination darstellen, ein Widerspruch.
8. $U_1 = U_3$, $U_2 \neq U_1, U_3$.
9. Es gilt $\mathbf{w} - \mathbf{u} = -(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (\mathbf{v} - \mathbf{w})$.
10. Mit Satz 13.4 können wir die Wronski-Determinanten aufstellen, wir erhalten $-2\cos x$ und $2e^{3x}$, also sind beide Mengen linear unabhängig.
11. Alle $a \in \mathbb{R}$.
12. 4.
13. $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, als Koordinaten erhalten wir $\begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix}$.
14. Das ist die Inverse der Matrix auf Seite 394:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
15. Monom auf Bernstein:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Hermite auf Bernstein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 2 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

16. Analog Abbildung 13.5.

17. $B = \{(1,0,0,-2,3)^T, (0,1,0,-1,0)^T, (0,0,1,1,0)^T\}$.

18. $\mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$.

19. $p_1(x) = 1, p_2(x) = \frac{1}{12}(x - \frac{1}{2}), p_3(x) = \sqrt{\frac{35}{6}}(x^2 - x + \frac{1}{6})$.

20. Nur die erste!

21. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

22. Es ist $Q^T\mathbf{b} = \mathbf{0}$ und R ist invertierbar.

23. $f(x) = 60,4833 + 0,115\,333x$.

24. $f(x) = 0,382\,445\frac{x}{1+x} + 1,039\,19(1 - e^{-x})$.

Kapitel 14

Lineare Abbildungen

1. Ja, die Matrixdarstellung ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
2. T nein, K ja (folgt aus Satz 12.14).
3. Mit Satz 14.7, wir erhalten $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Bezüglich der kanonischen Basis erhalten wir
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Wenn wir nach Satz 13.8 die jeweiligen Basistransformationsmatrizen bilden und entsprechend ausmultiplizieren, dann erhalten wir bezüglich den angegebenen Basen die Matrixdarstellung
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
5. Wir erhalten die Ergebnisse $x^2 + 3x + C$, $\sin x + C$, $x + C$.
6. Für die Matrixelemente gilt $a_{12} = 1, a_{23} = 2, \ldots, a_{k(k+1)} = k, \ldots, a_{(n-1)n} = n - 1$, alle anderen Elemente sind Null.
7. Die Summe der darstellenden Matrizen.
8. Die Matrizen sind $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
9. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
10. Die Spaltenvektoren müssen die Länge 1 haben, also gibt es Winkel ϕ und ψ mit $A_{11} = \cos\phi$, $A_{21} = \sin\phi$, $A_{12} = \sin\psi$, $A_{22} = \cos\psi$. Mit entsprechenden Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen kommen wir auf die erste angegebene Form. Die andere folgt analog.
11. Es ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

12. Wir müssen die Matrix A ablesen und diagonalisieren. Für die erste Form ergibt sich so die Matrix $diag(3,1)$.

13. $diag(2,4), diag(-50,-3,25), diag(0,3,3), diag(-25,-25,25,25)$.

14. $diag(-1,1,1)$.

15. Das Skalarprodukt ist linear, und damit auch F. Es werden Basisvektoren gesucht, für die $F(\mathbf{x}_1) = -\mathbf{x}_1, F(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_2, F(\mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_3$ gilt. Eine Lösung ist beispielsweise $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 = (1,1,0)^T, \mathbf{x}_3 = (-1,1,1)^T$.

16. Der Vektor $\mathbf{v}$ ist ein Eigenvektor der Abbildung. Jeder zu $\mathbf{v}$ orthogonale Vektor wird auf $\mathbf{0}$ abgebildet. Es gibt $n-1$ verschiedene, zu $\mathbf{v}$ orthogonale und linear unabhängige Vektoren, also ist die Abbildung diagonalisierbar.

17. Der Ausdruck ergibt die Matrix
$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
sie ist wie gefordert zu D ähnlich.

18. Einsetzen ...

19. Die Basisfunktionen in W sind bereits Eigenvektoren zu den Eigenwerten $1, -1$ und 2.

20. Wenn A und B diagonalisierbar sind, dann können wir die Matrix P bilden mit den Eigenvektoren als Spalten. Sind diese gleich, dann gilt $AB = PD_\lambda P^{-1} PD_\mu P^{-1} = BA$.

21. Alle Eigenwerte sind Null. Nehmen wir das Gegenteil an, dann existiert ein $\lambda \neq 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ und $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ein Widerspruch.

22. Wenn A die Singulärwertzerlegung UDV besitzt, dann gilt $AA^T = UD^2U^T$ und $A^TA = V^TD^2V$. Beide Matrizen sind diagonalisierbar, die Quadrate der singulären Werten von A sind jeweils die Eigenwerte.

23. Wenn A die Singulärwertzerlegung UDV besitzt, dann gilt $A^TA = V^TD^2V$. Die Matrix $P = V^TDV$ erfüllt die gegebene Gleichung.